

Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике

обучающегося 11 класса

муниципального бюджетного общеобразо-
вательного учреждения, гимназии 19 "
г.-к. Киселевска

Евченко Юлии Алексеевны
(Фамилия Имя Отчество)

Педагог-наставник: учитель ма-
тематике муниципального
бюджетного общеобра-
зовательного учреждения
гимназии 19 " Дюбина
Виктория Юрьевна

30 ноября 2020г.

№1. Ж

	жёлтый	красный	белый
Аншимчанин	-	+	-
Норвежец	+	-	-
Испанец	-	-	+
Ландоши	-	-	+
Сирень	-	+	-
Крокус	+	-	-
Сок	-	-	+
Вода	+	-	-
Молоко	-	+	-

- 1) Если аншимчанин живёт в красном доме, то он не может жить в жёлтом и белом; никто другой не может жить в красном доме.
- 2) Белый дом крайний справа, аншимчанин живёт в красном доме, а норвежец - в первом доме слева, то расположено домов таково: слева - жёлтый, посередине - красный, справа - белый. Следовательно, норвежец живёт в жёлтом доме.
- 3) Крокус - жёлтый дом, никто и нигде их больше не выращивает.
- 4) Молоко - средний дом.
- 5) Ландоши - сок. Ландоши выращивают либо в красном, либо в белом, в жёлтом нет, а сок пьют либо в жёлтом, либо в белом, в красном нет. Значит, человек, пьющий сок и выращивающий ландоши живёт в белом доме.
- 6) Остаётся: воду пьют в жёлтом доме, а сирень выращивают в красном.
- 7) Из таблицы следует, что норвежец пьёт воду.

Ответ: воду.

3. $a > 0$

5.5

$$x^2 - ax + (a+1) = 0 \quad D = b^2 - 4ac = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a+1) =$$

$$= a^2 - 4a - 4$$

$a=1 \quad b=-a \quad c=a+1$

(Смотрите на обратную)

Чтобы D исходного уравнения был > 0 (чтобы было два корня).

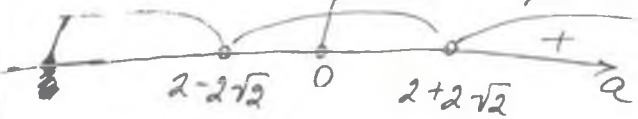
$$a^2 - 4a - 4 > 0$$

Чтобы сумма кубов корней уравнения была наименьшей, то сами корни должны быть наименьшими.

$D > 0$ в $a^2 - 4a - 4$ принимает положительное значение при:

$$a^2 - 4a - 4 > 0$$

$$(a - 2 - 2\sqrt{2})(a - 2 + 2\sqrt{2}) > 0$$



$$a \in (2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$$

Из теоремы Виета следует, что

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases}$$

$$*a^2 - 4a - 4 = 0 \text{ (один корень)}$$

$$D = 16 + 16 = 32 = (4\sqrt{2})^2$$

$$a_1 = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$a_2 = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4$$

$$2\sqrt{2} \approx 2,8$$

$$2 - 2\sqrt{2} \approx 2 - 2,8 \approx -0,8$$

значит точка 0 стоит правее

$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = a + 1 \\ x_1 + x_2 = -(-a) \end{cases}$ $a > 0$, поэтому и произведение, и сумма корней положительна, т.е. не могут быть отрицательными.

Если x_1 и x_2 одновременно отрицательны и при этом имеют разн. знаки, то их сумма будет $-$. Противоречие.

Если корни уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ положительны, то наименьшая сумма их кубов будет при самых наименьших значениях a . А если у a нет наименьшего значения? Если считать, что есть, то $a = 2 + 2\sqrt{2}$, тогда D изнач. уравнения будет $= 0$ и корень будет один, а в условии два корня.

Ответ: при $a = 2 + 2\sqrt{2}$

$$\sqrt[2020]{2021} = \dots 01$$

трай возведение, т.е. первая степень, $2021^1 = 2021$, $2021^2 = \dots 41$, $2021^3 = \dots 61$,

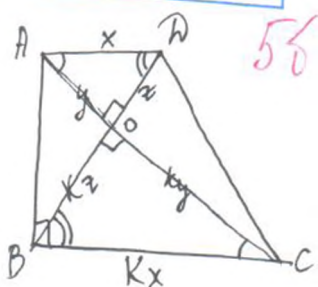
$2021^4 = \dots 81$. Заметим закономерность двух последних цифр: 21, 41, 61, 81. Разряд десятков с каждым последующим возведением в степень увеличивается на 2. Цикл: 21, 41, 61, 81, 01, затем цикл повторяется. Всего нужно возвести

в степень 2020 раз, т.е. это $2020 : 5 = 404$ полных цикла, так как поделилось без остатка. Следовательно, цикл будет завершен, 4 последние цифры числа будут 01.

Ответ: 01

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ЛИЦЕЙ №8
ГОРОДА-КУРОРТА КИСЛОВОДСКА

№4.



5б

AC ⊥ BD | Найти $\frac{BD}{AC}$.
 $\frac{BC}{AD} = K$

1. Рассмотрим $\triangle AOD$ и $\triangle COB$:

- 1. $\angle AOD = \angle COB = 90^\circ$ (по условию)
 - 2. $\angle OAD = \angle OCB$, как накрест лежащие ($AD \parallel BC$, AC - секущая)
- $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по двум углам.

2. $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA}$

$\frac{BC}{AD} = K$, значит коэффициент подобия равен K.

3. Пусть $OD = z$, тогда $OB = Kz$
Пусть $AO = y$, тогда $OC = Ky$

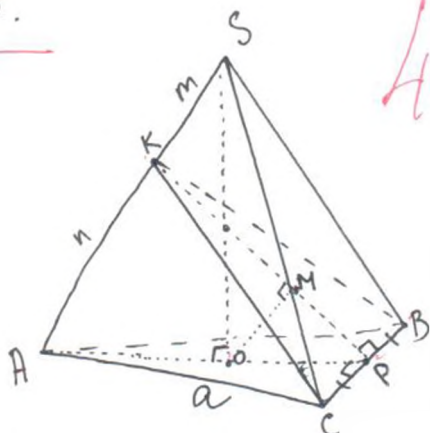
4. $BD = Kz + z = z(K+1)$
 $AC = Ky + y = y(K+1)$

$\text{tg} \angle DAO = \frac{z}{y}$

5. $\frac{BD}{AC} = \frac{z(K+1)}{y(K+1)} = \text{tg} \angle DAO$

Ответ: $\frac{BD}{AC} = \text{tg} \angle DAO$.

№5.



4б

Дано: $\frac{SK}{KA} = \frac{m}{n}$
 $\rho(O, (KBC)) = d = OM$
Найти Сечение СКВ.

Решение:

$S_{СКВ} = \frac{1}{2} CB \cdot KP$
Пусть сторона $\triangle ABC = a$ ($AC = CB = AB = a$)

1) Рассмотрим $\triangle ABC$ (равносторонний)
центры окружностей (впис. и вне.) $\rightarrow O$
центр пересечения медиан, биссектрис, высот $\rightarrow O$
Точка пересечения медиан делит медиану
в отношении 2:1, считая от вершины.
2) $\triangle APC$ - прямоугольный
 $AC = a$ $CP = \frac{a}{2}$ $AP = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
по т. Пифагора

3) $\frac{AO}{OP} = \frac{2}{1}$ $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $OP = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
4) $\triangle OMP$ (прямоуг.), по т. Пифагора
 $MP = \sqrt{\frac{3a^2}{36} - d^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} - d^2}$
5) AP - проекция $KP \Rightarrow \frac{KM}{MP} = \frac{1}{2}$
6) $KP = 3\sqrt{\frac{a^2}{12} - d^2}$
7) Сеч. СКВ = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 3\sqrt{\frac{a^2}{12} - d^2} = \frac{3a\sqrt{\frac{a^2}{12} - d^2}}{2}$

Ответ: $\frac{3a\sqrt{\frac{a^2}{12} - d^2}}{2}$