11.18.04

Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике

обучающегося 11 Е класса

муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения
„Гимназия №19"
г.-к. Кисловодска

Амиянц Анастасии Владимировны
(Фамилия Имя Отчество)

Педагог-наставник: учитель математики муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения „Гимназия №19"
Дюбина Виктория Юрьевна

30 ноября 2020г.

11.18.04.

№1 7б.

жёлтый	красный	белый
норвежец	англичанин	испанец
крокусы	сирень	ландыши
вода	молоко	сок

Т.к. норвежец живёт слева, красный дом у англичанина, а белый - справа, то норвежцу принадлежит жёлтый дом, в белом живёт испанец. Посередине красный дом англичанина.

Т.к. крокусы растут в доме жёлтого цвета, то их выращивает норвежец. Живущий посередине англичанин пьёт молоко, а не сок, и крокусы точно выращивает норвежец, тогда у англичанина в доме сирень. Испанец, за неимением других вариантов, растит ландыши и пьёт сок. Тогда воду пьёт норвежец.

Ответ: норвежец пьёт воду.

№2. 7б

Обозначим 2 последние цифры числа 2021^{2020} буквой a.
Возведём 2021 в различные степени и найдём закономерность в последних двух цифрах:

$2021^1=\dots21$ $\quad 2021^6=\dots21$
$2021^2=\dots41$ $\quad 2021^7=\dots41$
$2021^3=\dots61$ $\quad 2021^8=\dots61$
$2021^4=\dots81$ $\quad 2021^9=\dots81$
$2021^5=\dots01$ $\quad 2021^{10}=\dots01$

$a_1=21,\ a_2=41,\ a_3=61,\ a_4=81,$
$a_5=01=a_{10}=a_{15}=\dots=a_{2020}$

Каждая пятая степень оканчивается на „01". (
Степень 2020 без остатка делится на пять.

Тогда $a_{2020}=a_5=01$

Таким образом, последние две цифры числа 2021^{2020} - 01

Ответ: 01 - последние две цифры числа 2021^{2020}

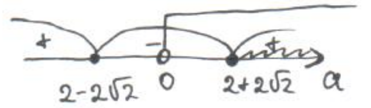
№3 7б

$x^2-ax+a+1=0\ ;\ a>0$

Для начала найдём такие значения a, чтобы уравнение имело решения: $D=b^2-4ac\geq0$, где $a=1,\ b=-a,\ c=a+1$

$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot(a+1)\geq0$

$a^2-4a-4\geq0$



Так как ветви параболы направлены вверх, то корнями неравенства будут значения вразлёт корней квадратного уравнения.

$D=16+4\cdot4=32=(4\sqrt2)^2$

$a_{1,2}=2\pm2\sqrt2$

$a\geq2+2\sqrt2$

$2+2\sqrt2$ приблизительно принадлежит промежутку $(4;5)$

Найдём сумму кубов корней изначального уравнения при $a=2+2\sqrt2$

$x^2-(2+2\sqrt2)x+2\sqrt2+3=0$

$D=(2+2\sqrt2)^2-4(2\sqrt2+3)=0$, 1 корень

$x_{1,2}=\frac{-b}{2a}=\frac{2+2\sqrt2}{2}=\frac{2(1+\sqrt2)}{2}=1+\sqrt2$

$x_1^3+x_2^3=2\cdot x^3=2(1+\sqrt2)^3=6\sqrt2+18$

Если $a=5$, то $x^2-5x+6=0$ имеет корни (по теореме Виета $\begin{cases}x_1x_2=6\\x_1+x_2=5\end{cases}$) $x_1=2$ и $x_2=3$, тогда $x_1^3+x_2^3=8+27=35$

Заметим, что чем большее значение принимает a, тем больше сумма кубов корней уравнения.
Таким образом, эта сумма принимает наименьшее возможное значение при $a=2+2\sqrt2$

Ответ: $a=2+2\sqrt2$

11.18.04

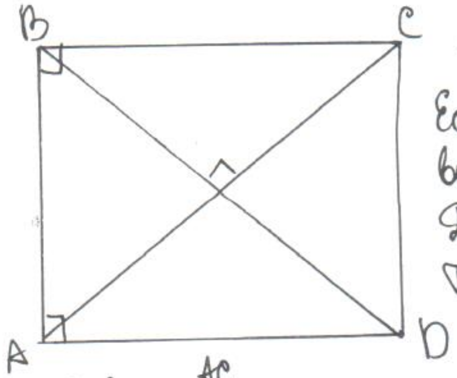
№4 0б.

Дано: ABCD - прямоугольная трапеция

$BC \parallel AD$ $\angle A = \angle B = 90°$ $\frac{BC}{AD} = k$

$AC \perp BD$

Найти: $\frac{AC}{BD}$



Так как ABCD - прямоугольная трапеция, то $\angle A = \angle B = 90°$. Если диагонали взаимно перпендикулярны, можно сделать вывод, что ABCD-квадрат ($BC \parallel AD$, $\angle A = \angle B = 90°$, $AC \perp BD$) Диагонали квадрата по свойству перпендикулярны и равны. Тогда их отношение $\frac{AC}{BD} = 1$.

Ответ: $\frac{AC}{BD} = 1$

№5 1б.

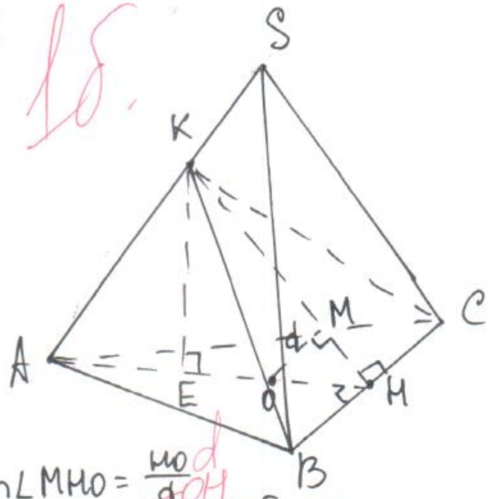
Дано: SABC - правильная пирамида

$\triangle KBC$ - сечение

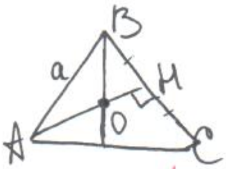
$\frac{SK}{KA} = \frac{m}{n}$

$V_{SABC} = V$

$OM = d$



S_{KBC} - ? | Пусть $AB = BC = AC = a$



$OH = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

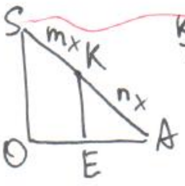
$\sin\angle MHO = \frac{HO}{d}$ $\frac{d}{OH}$

$OH = d\sin\angle MHO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$a = \frac{6d \sin\angle MHO}{\sqrt{3}}$

$V_{SABC} = V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$

$SO = \frac{V}{S_{ABC}} = \frac{4V}{a^2\sqrt{3}}$



$\frac{KE}{SO} = \frac{AE}{AO} = \frac{AK}{KS} = \frac{n}{m+n}$?

$EO = AO - AE = \frac{am}{\sqrt{3}(m+n)}$

$EH = EO + OH = \frac{a(2m+n)}{2\sqrt{3}(m+n)}$

$KE = \frac{4V \cdot n}{a^2\sqrt{3}(m+n)} = \frac{\sqrt{3}}{36d^2\sin^2\angle MHO}$

$AE = \frac{an}{\sqrt{3}(m+n)} = \frac{d\sin\angle MHO(2m+n)}{m+n}$

$KH = \sqrt{\frac{3}{36^2 d^4 \sin^4\angle MHO} + \frac{d^2\sin^2\angle MHO(2m+n)}{m+n}}$

$S_{KBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot KH = \frac{1 \cdot \cancel{6}^{3} d\sin\angle MHO}{\cancel{2} \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{36^2 d^4 \sin^4\angle MHO} + \frac{d^2\sin^2\angle MHO(2m+n)}{m+n}}$

Ответ: $S_{KBC} = \frac{3d\sin\angle MHO}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{36^2 d^4 \sin^4\angle MHO} + \frac{d^2\sin^2\angle MHO(2m+n)}{m+n}}$